どこかにあった問題　センター対策問題　微積分

a を，$0<a<1$ を満たす定数とする。

また，関数 $f(x)$ を $f(x)=ax^2+(2-4a)x+4a-\dfrac{15}{4}$ と定め，$y=f(x)$ の表す曲線を C とする。

$f(2)=\dfrac{(ア)}{(イ)}$ である。

また，C 上の点 $\mathrm{A}(2, f(2))$ における接線 l の傾きは(ウ)である。

よって，A を通り l に垂直な直線 m の方程式は

$y=\dfrac{(エ)(オ)}{(カ)}(x-2)+\dfrac{(ア)}{(イ)}$ である。

C と m で囲まれた部分のうち，$x \geq 0$ を満たす部分の面積を S とすると，

$S=(キ)-\dfrac{(ク)}{(ケ)}a$ である。

$f(2)=\dfrac{(ア)}{(イ)}$

$f(2)=4a+(2-4a)\cdot 2+4a-\dfrac{15}{4}=\dfrac{1}{4}$　・・・(答)

（ウ）

$f'(x)=2ax+2-4a$ より，$f'(2)=4a+2-4a=2$

よって，接線 l の傾きは 2　・・・(答)

$y=\dfrac{(エ)(オ)}{(カ)}(x-2)+\dfrac{(ア)}{(イ)}$

$\mathrm{A}(2, f(2))$ を通る傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線だから，$y=-\dfrac{1}{2}(x-2)+\dfrac{1}{4}$

$S=(キ)-\dfrac{(ク)}{(ケ)}a$

ここが問題の主題といえる。

$\displaystyle\int_0^2\left[-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{4}-\left\{ax^2+(2-4a)x+4a-\frac{15}{4}\right\}\right]dx$ を求めればよいわけだが，

このまま計算するのは大変？である。

そこで一工夫

$f(2)=\dfrac{1}{4}$ は，剰余定理より，$f(x)$ を $x-2$ で割った余りが $\dfrac{1}{4}$ であることを意味するから，

組立除法 $\begin{array}{ccc|c} a & 2-4a & 4a-\frac{15}{4} & 2 \\ & 2a & 4-4a & \\ \hline a & 2-2a & \frac{1}{4} & \end{array}$ を利用すれば，

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-2)\{ax+(2-2a)\}+\frac{1}{4} \\ &=(x-2)\{a(x-2)+2\}+\frac{1}{4} \\ &=a(x-2)^2+2(x-2)+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \therefore -\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{4}-\left\{ax^2+(2-4a)x+4a-\frac{15}{4}\right\}&=-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{4}-\left\{a(x-2)^2+2(x-2)+\frac{1}{4}\right\} \\ &=-\frac{1}{2}(x-2)-a(x-2)^2-2(x-2) \\ &=-a(x-2)^2-\frac{5}{2}(x-2) \end{aligned}$$

よって，

$$\int_0^2 \left[-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{4}-\left\{ ax^2+(2-4a)x+4a-\frac{15}{4} \right\} \right] dx = -\int_0^2 \left\{ a(x-2)^2+\frac{5}{2}(x-2) \right\} dx$$

$$= \int_2^0 \left\{ a(x-2)^2+\frac{5}{2}(x-2) \right\} dx$$

$$= \left[\frac{a}{3}(x-2)^3+\frac{5}{4}(x-2)^2 \right]_2^0$$

$$= -\frac{8}{3}a+5$$

ゆえに，$S=5-\dfrac{8}{3}a$

参考図